7/11/2016

Προταση

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία με $a_n \neq 0$ για κάθε n

α) Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ με $l>1$

Τοτε $a_n \to +\infty$

β) Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l$ με $l<1$

Τοτε $a_n \to 0$

Αποδειξη

α) Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $1<\lambda<l$

Εφόσον $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ εφαρμοσοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = l-\lambda > 0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $(l+\varepsilon >)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > l-\varepsilon = l-(l-\lambda) = \lambda$

δεν βοηθάει στην αποδειξη.

$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} > \lambda \Rightarrow a_{n_0+1} > \lambda a_{n_0}$

$a_{n_0+2} > \lambda a_{n_0+1} \Rightarrow a_{n_0+2} > \lambda^2 a_{n_0}$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι

$a_{n_0+k} > \lambda^2 a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Έτσι για κάθε $n > n_0$

$a_n = a_{n_0+(n-n_0)} > \lambda^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right) \lambda^n$

Εφόσον $\lambda > 1$ $\quad \lambda^n \to +\infty$ $\quad$ άρα και $a_n \to +\infty$

β) Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\ell < \lambda < 1$

Εφόσον $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \ell$ από τον ορισμό για $\varepsilon = \lambda - \ell > 0$

Προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \ell + \varepsilon = \lambda$

Έτσι $|a_{n_0+1}| < \lambda |a_{n_0}|$

$|a_{n_0+2}| < \lambda |a_{n_0+1}| < \lambda^2 |a_{n_0}|$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι

$|a_{n_0+k}| < \lambda^k |a_{n_0}| \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Έτσι για κάθε $n > n_0$

$|a_n| = |a_{n_0+(n-n_0)}| < \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{\lambda^{n_0}} \cdot \lambda^n$

Επομένως $a_n \to 0$

Παραδείγματα

1) Έστω $0<\theta<1$
και $x_n = n^{10}\theta^n$

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)^{10}\,\theta^{n+1}}{n^{10}\cdot\theta^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\cdot\theta \to \theta$$

$\theta<1$

Άρα $x_n \to 0$

2) $\theta>0$ $\quad x_n = \frac{\theta^n}{n!}$

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\theta^n}{n!}} = \frac{\theta^{n+1}\cdot n!}{\theta^n (n+1)!} = \frac{\theta}{n+1} \to 0 \quad <1$$

άρα $x_n \to 0$

Πρόταση
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών
(i) Αν $\sqrt[n]{a_n} \to l$, με $l<1$ τότε $a_n \to 0$
(ii) Αν $\sqrt[n]{a_n} \to l$ με $l>1$ τότε $a_n \to +\infty$

(i) Επιλέγουμε $q\in\mathbb{R}$ με $l<q<1$
Εφόσον $\sqrt[n]{a_n} \to l$ από τον ορισμό
για $\varepsilon = q-l>0$
$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για $n\geq n_0$
να ισχύει $\sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon = l+(q-l) = q$
Έτσι για $n\geq n_0$ $\quad 0<a_n<q^n$
Συνεπώς $a_n \to 0$

(ii) Επιλέγουμε λ με $1<\lambda<l$

Εφόσον $\sqrt[n]{a_n} \to l$ από τον ορισμό για $\varepsilon = l-\lambda>0$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} > l-\varepsilon = l-(l-\lambda) = \lambda$$

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ $\quad a_n > \lambda^n \to +\infty \quad (\lambda>1)$

άρα $a_n \to +\infty$

<u>Παραδείγματα</u>

(α) $a_n = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{n}\right)^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{n} \to \frac{4}{3} > 1$$

άρα $a_n \to +\infty$

(β) $b_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} \to \frac{2}{3} < 1$$

άρα $b_n \to 0$

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Θα αποδείξουμε ότι η (a_n) είναι συγκλίνουσα

Θέτουμε $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)^n \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}$$

$$\underset{\text{ανισότητα Bernoulli}}{>} \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n^2+2n+1)(n+1)} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Επομένως $(a_{n+1}) > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

άρα η (a_n) είναι αύξουσα

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$$

$$\underset{\text{ανισότητα Bernoulli}}{>} \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

Άρα $b_{n+1} < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Έτσι $a_n < a_{n+1}$ $\quad b_{n+1} < b_n$ $\quad \forall n$

$a_n < b_n$ $\quad \forall n$

Έτσι $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_n \leq b_n \leq b_1$

Έτσι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη άνω άρα συγκλίνουσα

Θέτουμε $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Αποδεικνύεται ότι το e είναι άρρητος και μάλιστα υπερβατικός (δηλ. δεν υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές που να έχει ρίζα το e)

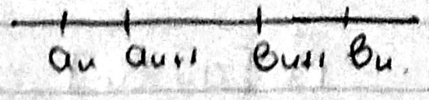
Πρόταση
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες ώστε

(i) $a_n \leq a_{n+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $b_{n+1} \leq b_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \leq b_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iv) $b_n - a_n \to 0$ $\quad$ (ή $\begin{matrix} a_n > 0 \\ b_n > 0 \end{matrix}$ $\forall n$ και $\frac{b_n}{a_n} \to 1$)

Τότε οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό

Απόδειξη

$\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\quad \alpha_\nu \underset{(iii)}{\leq} \beta_\nu \underset{(ii)}{\leq} \beta_1$



Άρα η (α_ν) άνω φραγμένη (από το β_1)

(α_ν) αύξουσα και άνω φραγμένη

$\Rightarrow (\alpha_\nu)$ συγκλίνουσα.

Θέτουμε $\xi = \lim \alpha_\nu$.

$\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\quad \beta_\nu \geq \alpha_\nu \geq \alpha_1$, άρα η (β_ν) είναι κάτω φραγμένη (από το α_1)

β_ν φθίνουσα και κάτω φραγμένη $\Rightarrow (\beta_\nu)$ συγκλίνουσα

Θέτουμε $\eta = \lim \beta_\nu$.

$$\left.\begin{array}{l} \beta_\nu \to \eta \\ \alpha_\nu \to \xi \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_\nu - \alpha_\nu \to \eta - \xi$$

Εφόσον από (iv) $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0$

προκύπτει $\xi = \eta$.

Αρχή κιβωτισμένων διαστημάτων

Έστω $([\alpha_\nu, \beta_\nu])_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων με $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}] \subseteq [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Αν $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0$ τότε $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} [\alpha_\nu, \beta_\nu] = \{\xi\}$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$.

Χωρίς την υπόθεση $b_n - a_n \to 0$

Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\xi, n]$ όπου $\xi = \lim a_n$ ή $n = \lim b_n$

Άσκηση

Δίνονται οι ακολουθίες

$$x_n = \frac{2^n n!}{n^n} \qquad y_n = \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1}(n+1)!\, n^n}{2^n \cdot n!\,(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{2\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1$$

Συνεπώς $x_n \to 0$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \cdots = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1$$

Συνεπώς $y_n \to +\infty$

Υπακολουθίες

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

Επιλέγοντας φυσικούς αριθμούς
$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$

Δημιουργούμε μια νέα ακολουθία με γενικό όρο a_k

Ορισμός

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα ορίζεται μια νέα ακολουθία με τύπο $b_n = a_{k_n}$

Μια ακολουθία που ορίζεται με αυτό τον τρόπο λέγεται υπακολουθία της (a_n)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "a^k"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "a"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα

(α) Επιλέγοντας $k_n = 2n$ προκύπτει η υπακολουθία $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ των άρτιων όρων της (a_n)

(β) Επιλέγοντας $k_n = 2n-1$ προκύπτει η υπακολουθία $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ των περιττών όρως της (a_n)

Παρατήρηση

Αν $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα τότε $k_n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αποδ.

Με επαγωγή.

Για $n=1$ ισχύει εφόσον $k_1 \in \mathbb{N}$ άρα $k_1 \geq 1$

Γεν. επαγ. βήμα Υποθέτουμε ότι $k_n \geq n$ και k_n, k_{n+1} φυσικοί

Εφόσον $k_{n+1} > k_n$ και ...

Θα ισχύει $k_{n+1} \geq k_n + 1$

και εφόσον $k_n \geq n$

προκύπτει ότι $k_{n+1} \geq n+1$.